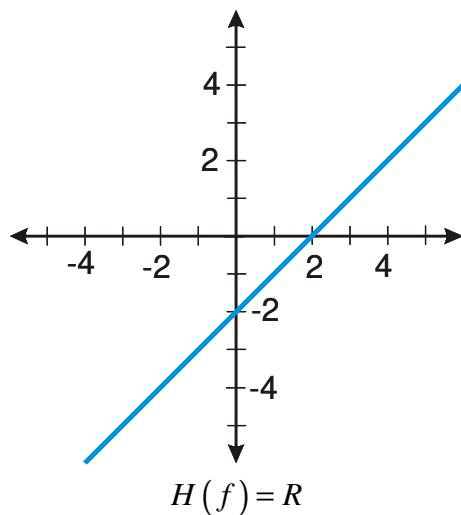


2.4.7 Omezenost funkcí, maximum a minimum

Předpoklady: 2203, 2402

Pedagogická poznámka: Je třeba postupovat tak, aby se na konci stihlo zadání domácího úkolu.

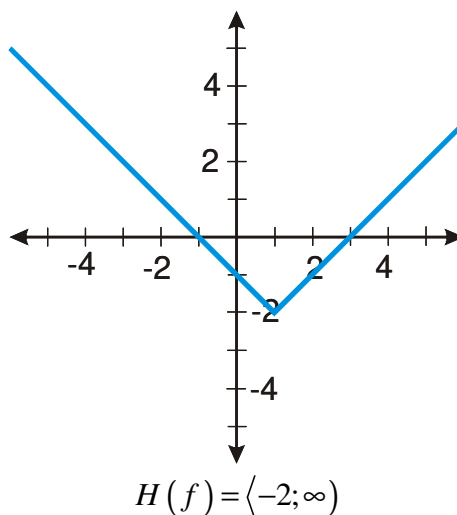
Př. 1: Nakresli vedle sebe grafy funkcí: $y_1 = x - 2$, $y_2 = |x - 1| - 2$, $y_3 = \frac{1}{|x|}$. Urči jejich obory hodnot.



Funkce může nabýt všech hodnot.

Funkce není omezená

(může jít do libovolně malých i libovolně velkých hodnot).



Jakých hodnot nabývá funkce?

Funkce nabývá pouze hodnot větších než nebo rovných -2 . (ale i hodnot větších než -3 nebo -100).

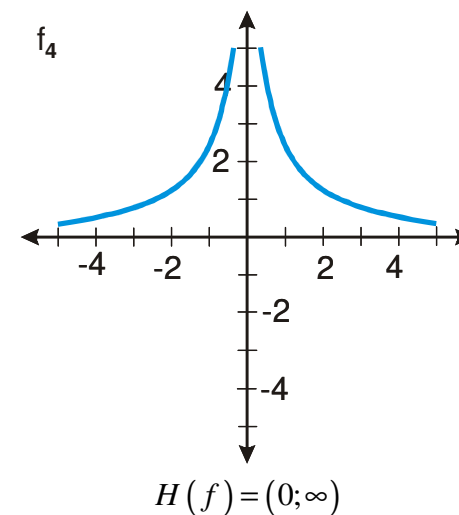
Funkce je zdola omezená

(nemůže jít do libovolně malých hodnot, zezdola ji něco omezuje v rozletu).

Jak definice?

Funkce je zdola omezená právě když existuje takové číslo $d \in \mathbb{R}$, že pro všechna $x \in D(f)$ platí $f(x) \geq d$.

Urči číslo d z předchozí definice.



Funkce nabývá pouze hodnot větších než 0 . (ale i hodnot větších než -3 nebo -100).

$$d = -2; -3; -\pi; -1620; \dots$$

nekonečně mnoho takových čísel $d \in (-\infty; -2)$

Co znamená rozdíl v typech oboru hodnot (zleva uzavřený x zleva otevřený interval).

Funkce má pro $x = 1$ nejmenší hodnotu $y = -2$.

Funkce má minimum pro $x = 1$ s hodnotou $y = -2$.

Jak napsat definici, aby se lišila od definice omezené funkce?

To číslo, které je menší než hodnoty funkce musí být hodnota funkce pro nějaké x .

Definice?

Funkce $f(x)$ má minimum právě, když existuje

$x_0 \in D(f)$ takové, že pro každé $x \in D(f)$

$$\text{platí } f(x) \geq f(x_0)$$

$$d = 0; -1; -2; -\pi; -2006; \dots$$

nekonečně mnoho takových čísel $d \in (-\infty; 0)$

Funkce nemá nejmenší hodnotu, platí

$$f(10) = \frac{1}{10}; f(100) = \frac{1}{100} \text{ atd. Hodnoty se pro}$$

zvětšující se x zmenšují, ale pořád jsou větší než 0 a žádná z nich není nejmenší (jak se tam vejdu? – to jsou ta nekonečna)

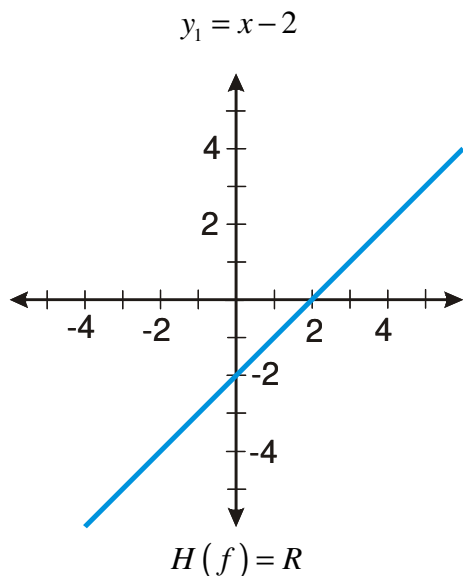
Co je vzácnější existence minima nebo omezenost zdola?

Existence minima. Už z tabulky je vidět, že existuje zdola omezená funkce bez minima. Pokud má ale funkce minimum, musí být omezená (při nejhorším hodnotou minima).

Platí: existuje minimum \Rightarrow omezenost zdola.

Pedagogická poznámka: Studenti v tomto okamžiku nevědí, jak vypadá graf funkce $y = \frac{1}{|x|}$. Proto jim na tabuli nakreslím graf funkce $y = \frac{1}{x}$ s tím, že zbytek musí vyřešit sami (stejným způsobem jako dosud řešili grafy funkcí s absolutní hodnotou).

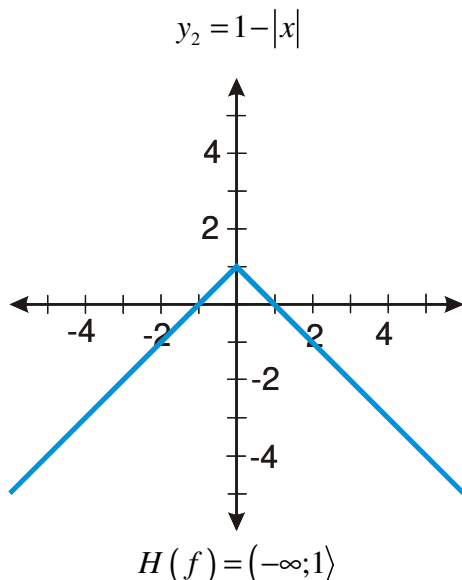
- Př. 2:** Nakresli grafy tří funkcí tak, aby:
- jedna nebyla omezená,
 - jedna byla shora omezená, ale neměla maximum,
 - jedna měla maximum.
- Vytvoř obdobnou tabulku, jakou jsme měli u funkcí omezených zdola. Doplně do ní všechny definice.



Funkce může nabýt všech hodnot.

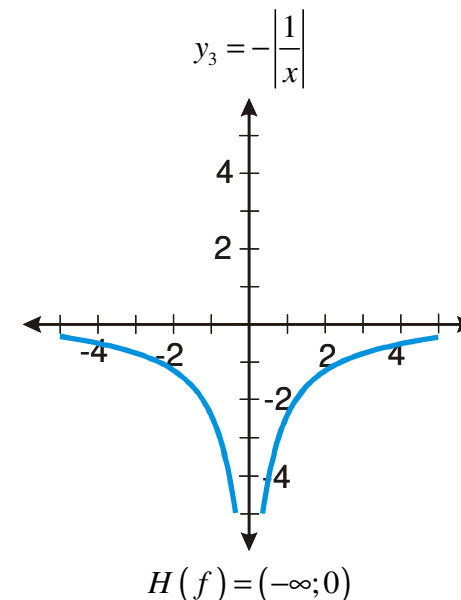
Funkce není omezená

(může jít do libovolně malých i libovolně velkých hodnot).



Jakých hodnot nabývá funkce?

Funkce nabývá pouze hodnot menších než nebo rovných 1. (ale i hodnot menších než 12 nebo 1989).



Funkce nabývá pouze hodnot menších než 0. (ale i hodnot menších než 3 nebo 100).

Funkce je shora omezená

(nemůže jít do libovolně velkých hodnot, seshora ji něco omezuje v rozletu).

Jak definice?

Funkce je shora omezená právě když existuje takové číslo $D \in \mathbb{R}$, že pro všechna $x \in D(f)$ platí

$$f(x) \leq D.$$

Urči číslo D z předchozí definice.

$$d = 2; 3; \pi; 1278; \dots$$

nekonečně mnoho takových čísel $D \in \langle 1; \infty \rangle$

$$d = 0; 1; 2; \pi; 1848; \dots$$

nekonečně mnoho takových čísel $D \in \langle 0; \infty \rangle$

Co znamená rozdíl v typech oboru hodnot (zprava uzavřený x zprava otevřený interval).

Funkce má největší hodnotu pro $x = 0$, dosahuje největší hodnotu $y = 1$.

Funkce nemá největší hodnotu, platí $f(10) = -\frac{1}{10}; f(100) = -\frac{1}{100}$ atd. Hodnoty se pro zvětšující se x zvětšují, ale pořád jsou menší než 0 a žádná z nich není největší (jak se tam vejdou? – to jsou ty nekonečna)

Funkce má maximum pro $x = 0$ s hodnotou $y = 1$.
Jak napsat definici, aby se lišila od definice omezené funkce?

To číslo, které je větší než hodnoty funkce musí být hodnota funkce pro nějaké x .
Definice?

Funkce $f(x)$ má maximum právě, když existuje $x_0 \in D(f)$ takové, že pro každé $x \in D(f)$ platí $f(x) \leq f(x_0)$

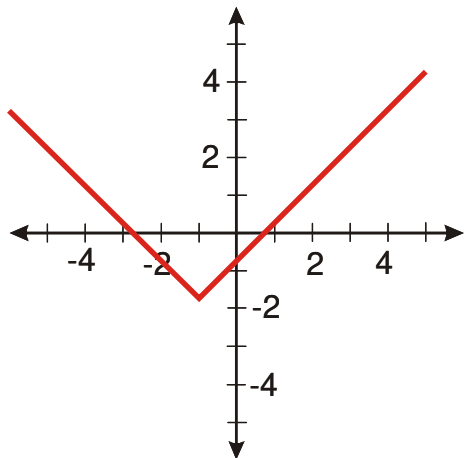
Pedagogická poznámka: Všechny definice by studenti měli napsat samostatně. Pokud nás tlačí čas, část vyplňování přeskakujeme.

Funkce, která je omezená zdola i shora, se nazývá omezená.

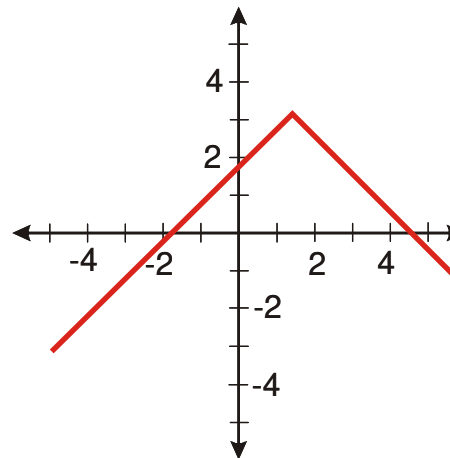
Př. 3: Najdi lineární funkci, která je omezená.

Každá konstantní funkce je omezená.

Př. 4: Nakresli grafy funkcí $y_1 = |x+1| - \sqrt{3}$ a $y_2 = -|\sqrt{2-x}| + \pi$ a urči obor hodnot, zda jsou omezené, zdola, shora omezené, zda mají maximum či minimum a kdy jsou rostoucí a kdy klesající.



$H(f) = \langle -\sqrt{3}; \infty \rangle$
 omezená zdola
 není omezená shora
 má minimum pro $x = -1$ s hodnotou
 $y = -\sqrt{3}$ (tedy minimum v bodě
 $[-1; -\sqrt{3}]$)
 rostoucí v intervalu $\langle -1; \infty \rangle$
 klesající v intervalu $(-\infty; -1)$

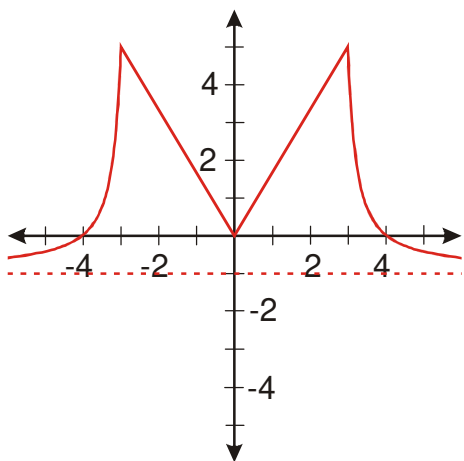


$H(f) = (-\infty; \pi)$
 omezená shora
 není omezená zdola
 má maximum pro $x = \sqrt{2}$ s hodnotou
 $y = \pi$ (tedy maximum v bodě
 $[\sqrt{2}; \pi]$)
 rostoucí v intervalu $(-\infty; \sqrt{2})$
 klesající v intervalu $\langle \sqrt{2}; \infty \rangle$

Pedagogická poznámka: Je dobré studenty upozornit na to, že při určování minima je potřeba uvádět obě souřadnice. Příkladně nakreslit na tabuli dva jednoduché příklady.

Př. 5: Nakresli graf libovolné funkce, která splňuje najednou následující podmínky:

- $D(f) = \mathbb{R}$,
- funkce je omezená, má maximum 5 v bodě $x = 3$, nemá minimum,
- funkce je sudá,
- funkce je rostoucí v intervalu $\langle 0; 2 \rangle$.



Řešení je mnoho, je nutné zkontrolovat, co nakreslí studenti.

Pedagogická poznámka: Následující dva příklady nejsou řešeny v této hodině, ale zabývá se jimi hodina příští. Žáci by se na řešení měli připravit doma (samostatně).

Př. 6: Projdi si všechny grafy funkcí s absolutní hodnotou v předchozích hodinách 2401-2407 a najdi odpověď na následující otázky.

- a) V jakých případech mají grafy tvar písmena V nebo obráceného písmena V?
- b) V jakých případech je možné použít pro řešení metodu napodobení výpočtu?
- c) V jakých případech je možné použít pro řešení metodu dělení definičního oboru?

Př. 7: Na základě příkladů řešených v předchozích hodinách 2401-2407 rozhodni, jaký tvar mají grafy funkcí daných předpisem $y = a|x - b| + c$. Jakým způsobem ovlivňují tvar výsledného grafu hodnoty konstant a , b a c ?

Shrnutí: Funkce je omezená, je-li omezený její obor hodnot.